Concours d'Admission 1978

ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES — ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE CENTRALE DE LYON — ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

Epreuve de MATHEMATIQUES I (2 pages de texte) OPTION M

On notera $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs, $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels.
La partie III est indépendante des parties I et II.

I

On considère la suite $P = (P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{2n-1} + x^{2n}.$$

Ainsi, $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = 1 + x + x^2$, $P_2(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$. Pour tout $x \neq 1$, on sait que

$$P_n(x) = \frac{1 - x^{2n+1}}{1 - x}.$$

1- Quel est l'ensemble des racines réelles de l'équation $P_n(x) = 0$?
2- Dessiner, dans un même repère, et justifier rapidement les positions mutuelles de la courbe représentative de la fonction $f : x \longmapsto (1-x)^{-1}$ et des courbes représentatives des fonctions P_n et P_{n+1}, pour un entier $n \geq 2$ et pour les $x \in]-\infty, 1[$. Préciser les valeurs de $P_n(1)$, $P_n(-1)$ et celles des dérivées $P_n'(1)$, $P_n'(-1)$. On tracera en pointillé l'arc correspondant à f et en traits pleins les arcs correspondant à P_n et P_{n+1}.
3- Quel est l'ensemble E des réels x pour lesquels la suite $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge ?
4- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$b_n = \inf_{\mathbb{R}} P_n(x)$$

Montrer que $b_n > 0$ et que, pour $n > 0$, il existe un réel unique a_n pour lequel $b_n = P_n(a_n)$. On posera $a_0 = 0$.
5- a) Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie précédemment admet une limite α que l'on déterminera.
b) Déterminer un équivalent simple de $a_n - \alpha$ pour n tendant vers $+\infty$.
c) La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle monotone ?
d) Résoudre pour la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des questions analogues à a), b), c).

II

A tout vecteur $\vec{V} = (x_0, x_1, \ldots, x_{2k-1}) \in \mathbb{R}^{2k}$ on associe l'application $f_{\vec{V}}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f_{\vec{V}}(t) = \frac{\sum_{i=0}^{2k-1} x_i t^i}{P_k(t)}$$

1- Montrer que, pour tout $\vec{V} \in \mathbb{R}^{2k}$, cette application $f_{\vec{V}}$ est bornée. On pose alors :

$$N(\vec{V}) = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f_{\vec{V}}(t)|$$

2- Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^{2k}$.
3- On se place maintenant dans $\mathbb{R}^2$, $k = 1$, et l'on note $\vec{V} = (x,y)$ plutôt que $\vec{V} = (x_0, x_1)$. On a ainsi

$$f_{\vec{V}}(t) = \frac{x + yt}{1 + t + t^2}$$

Montrer que l'ensemble S des $\vec{V} \in \mathbb{R}^2$ de norme 1, $N(\vec{V}) = 1$, est constitué d'arcs de coniques que l'on déterminera et que l'on construira, le plan affine $\mathbb{R}^2$ étant rapporté au repère constitué par l'origine $(0,0)$ et par la base $((1,0),(0,1))$.
4- La norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$ est notée N'. On rappelle que les normes N et N' sont équivalentes, c'est-à-dire qu'il existe des constantes α et β vérifiant $0 < \alpha < \beta$ et telles que, pour tout $\vec{V} \in \mathbb{R}^2$, on ait :

$$\alpha . N(\vec{V}) \leq N'(\vec{V}) \leq \beta . N(\vec{V}).$$

Calculer la plus grande valeur possible de α et la plus petite valeur possible de β avec une erreur au plus égale à 5.10^{-2}.

III

Soit $\mathcal{B}$ l'espace vectoriel des suites réelles $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui sont bornées. On admet qu'en posant $\|x\| = \sup_{\mathbb{N}} |x_n|$ on définit une norme sur $\mathcal{B}$.
1- Vérifier, pour tout réel $t \in [0,1]$ et toute suite $x \in \mathcal{B}$, la convergence de la série de

.../...

terme général $u_{n,x}(t) = x_n t^n(1-t)$, dont on appellera $g_x(t)$ la somme .

2- Démontrer que, pour toute suite $x \in \mathcal{B}$, la fonction g_x: $t \longmapsto g_x(t)$ est bornée sur $[0,1]$.

3- On pose alors :

$$\nu(x) = \sup_{t\in[0,1]} |g_x(t)|$$

a) Montrer que ν est une norme sur $\mathcal{B}$.

b) A titre d'exemples, calculer la norme $\nu(x)$ lorsque x est la suite définie par : $x_n = \cos(n.2\pi/3)$, puis la norme $\nu(x)$ lorsque x est la suite définie, avec $p \in \mathbb{N}$ donné, par $x_p = 1$ et $x_n = 0$ si $n \neq p$.

4- Les normes $\| \ \|$ et ν sont-elles équivalentes ?

5- A toute suite $x \in \mathcal{B}$ on associe la suite $y = f(x)$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$y_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x_k$$

a) Montrer que $y \in \mathcal{B}$.

b) Pour la norme $\| \ \|$, l'application f de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}$ est-elle continue ? Est-elle uniformément continue ?

c) Déterminer une relation simple entre g_x et g_y. Comparer $\nu(x)$ et $\nu(y)$.

Pour la norme ν, l'application f est-elle continue ? Est-elle uniformément continue ?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail